guessmaths

Série n°4 «Exercices sur Dérivation » **Terminal S**

Exercices 1 : Tangente parallèle à une droite donnée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\dfrac{(1-x)^3}{1+x^2}$. *On note* (C) *la courbe représentative de f.*

1) Peut-on trouver des points de (C) *où la tangente à* (C) *est parallèle à la droite Δ d'équation* $y=-x+4$ *?*

2) Dans l'affirmative, préciser le nombre de ces points et leur abscisses.

Correction

1) Pour trouver des points de (C) *où la tangente à* (C) *est parallèle à la droite Δ d'équation* $y=-x+4$ *;il faut que le nombre dérivée de chacune de ces points soit égale à* -1

Ceci revient à résoudre l'équation $f'(x)=-1$

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ *; on a :* $f'(x)=\dfrac{-3(1-x)^2(1+x^2)-2x(1-x)^3}{(1+x^2)^2}$

$$=\frac{\left(-3(1+x^2)-2x(1-x)\right)(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(-3-3x^2-2x+2x^2)(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(-x^2-2x-3)(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{-(x^2+2x+3)(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

Donc $f'(x)=-1$ *est équivaut à* $\dfrac{-(x^2+2x+3)(1-x)^2}{(1+x^2)^2}=-1$

équivaut à $(x^2+2x+3)(1-x)^2=(1+x^2)^2$

$$\text{équivaut à } \left(x^2+2x+3\right)\left(1-2x+x^2\right)=1+2x^2+x^4$$

$$\text{équivaut à}$$

$$\cancel{x^2} \cancel{-2x^3} + \cancel{x^4} + 2x \cancel{-4x^2} + \cancel{2x^3} + 3 - 6x + \cancel{3x^2} = 1 + 2x^2 + \cancel{x^4}$$

$$\text{équivaut à } 3-4x=1+2x^2$$

$$\text{équivaut à } 2x^2+4x-2=0$$

$$\text{équivaut à } x^2+2x-1=0$$

$$\text{équivaut à } \left(x+1\right)^2-2=0$$

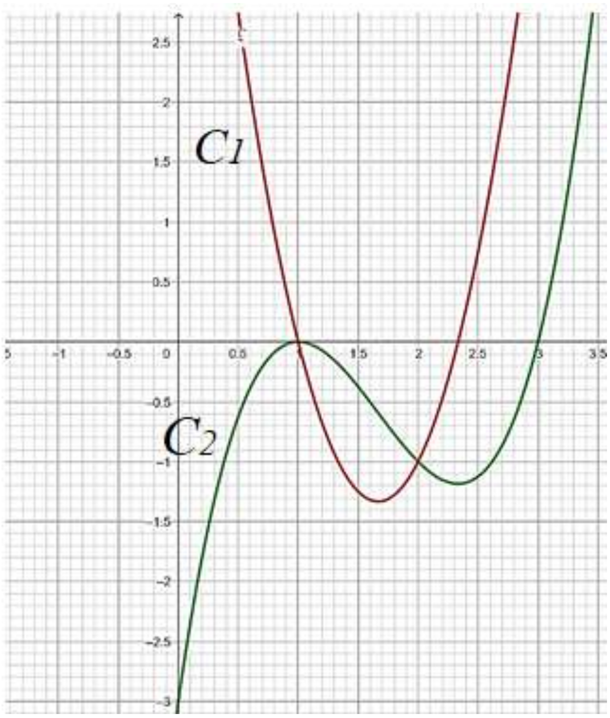
$$\text{équivaut à } \left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)=0$$

$$\text{équivaut à } x=-1+\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x=-1-\sqrt{2}$$

D'où le nombre des points de (C) où la tangente à (C) est parallèle à la droite Δ d'équation $y=-x+4$ est deux d'abscisses respectives $x_1=-1+\sqrt{2}$ et $x_2=-1-\sqrt{2}$

<u>Exercices 2 :</u>* *Reconnaitre la courbe de f et f' - équation de tangente

On a tracé deux courbes C_1 et C_2.
L'une est la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. L'autre est la courbe de sa dérivée $\mathbb{R}$.



1) Associer à chaque courbe, la fonction qui lui correspond en justifiant.
2) A l'aide du graphique, déterminer une équation de chacune des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisse 1 et d'abscisse 2

Correction

1) On lit bien sur le graphe que quand la courbe C_2 est croissante la courbe C_1 est au-dessus de l'axe des abscisses et quand la courbe C_2 est décroissante la courbe C_1 est au-dessous de l'axe des abscisses d'où on conclut que C_2 est la courbe de la fonction et C_1 celle de la dérivée.

2) On lit sur le graphique que : ► $f(1)=0$ *et* $f'(1)=0$ *; donc une équation de la tangente au point d'abscisse* 1 *est* $y=0$

► $f(2)=-1$ *et* $f'(2)=-1$ *; donc une équation de la tangente au point d'abscisse* 1 *est* $y=-(x-2)+1$

$$=-x+3$$

Exercices 3 Tangente commune à 2 courbes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x^2$ *et g la fonction définie sur* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *par :*

$g(x)=\dfrac{1}{x}$.

L'objectif de ce problème est de montrer que les courbes de f et g admettent une tangente commune dont on donnera une équation. On notera C_f *la courbe de f et* C_g *la courbe de g.*

1) Déterminer une équation de la tangente à C_f *au point d'abscisse a.*

2) Déterminer une équation de la tangente à C_g *au point d'abscisse b.*

3) Démontrer que l'existence d'une tangente commune revient à résoudre $\begin{cases} 2a=-\dfrac{1}{b^2} \\ -a^2=\dfrac{2}{b} \end{cases}$

4) Justifier que l'équation $x^3=-8$ *admet une unique solution sur* $\mathbb{R}$.
Donner la valeur de cette solution.

Correction

1) Une équation de la tangente à C_f *au point d'abscisse a est :* $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$$=2a(x-a)+a^2\ .$$
$$=2ax-2a^2+a^2\ .$$
$$=2ax-a^2\ .$$

2) Une équation de la tangente à C_g *au point d'abscisse b est :* $y=g'(b)(x-b)+g(b)$

$$=-\frac{1}{b^2}(x-b)+\frac{1}{b}\ .$$
$$=-\frac{1}{b^2}x+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ .$$
$$=-\frac{1}{b^2}x+\frac{2}{b}\ .$$

3) L'existence d'une tangente commune veut dire qu'il y a égalité des équations des deux tangente donc revient à résoudre $2ax-a^2=-\frac{1}{b^2}x+\frac{2}{b}$ *donc* $\begin{cases}2a=-\frac{1}{b^2}\\ -a^2=\frac{2}{b}\end{cases}$

4) On considère la fonction $h(x)=x^3+8$

On a : $h'(x)=3x^2$ *; donc* $h'(x)\geq 0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *alors h est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$

Et comme elle est continue et $h(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

D'où l'équation $h(x)=0$ *càd l'équation* $x^3=-8$ *admet une unique solution sur* $\mathbb{R}$.

On a :
$$\begin{aligned} x^3=-8 &\Leftrightarrow x^3+8=0\\ &\Leftrightarrow x^3+2^3=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)\left(x^2+2x+2^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow x+2=0 \quad ou \quad x^2+2x+4=0\\ &\Leftrightarrow x+2=0 \quad ou \quad (x+1)^2+3=0 \end{aligned}$$

Or $(x+1)^2+3>0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *; on conclut que :* $x=-2$