guessmaths

Série n°1 «Exercices sur Dérivation » *Terminal S*

Exercice 1

On considère les fonctions f dérivables sur l'intervalle I indiqué.

Dans chacun des cas, déterminer $f'(x)$.

1. $f(x) = -4x^2 + 50x - 96$ $\quad I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = (4x+7)(7x+10)$ $\quad I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \dfrac{3x-4}{2x+1}$ $\quad I = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

4. $f(x) = \dfrac{8+3x}{1-6x}$ $\quad I = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{6}\right\}$

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x-8}$ $\quad I = \mathbb{R}^+ \setminus \{4\}$

6. $f(x) = \dfrac{x^2+18x}{6x+4}$ $\quad I = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$

7. $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x^2-3x+5}$ $\quad I = \mathbb{R}$

Correction

1. $f(x) = -4x^2 + 50x - 96$ $\quad I = \mathbb{R}$

   f est dérivable sur comme polynôme de 2éme degré ; et pour tout $x \in \mathbb{R}$ *on a :*

   $f'(x) = -8x + 50$

2. $f(x) = (4x+7)(7x+10)$

   f est dérivable sur comme produit de deux polynômes de 1er degré ; et pour tout $x \in \mathbb{R}$

   on utilise la formule des opérations sur les dérivées

   $$\big(u(x).v(x)\big)' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com
WhatsApp : 0717467136

$$f'(x)=\big((4x+7)(7x+10)\big)'$$
$$=4(7x+10)+7(4x+7)$$
$$=28x+40+28x+49$$
$$=56x+89$$

3. $f(x)=\dfrac{3x-4}{2x+1}$ $\qquad$ $I=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

f est dérivable sur comme quotient de deux polynômes de 1er degré dont le numérateur ne s'annule pas sur $I=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ *; et pour tout* $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

on utilise la formule des opérations sur les dérivées

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-4}{2x+1}\right)'$$
$$=\frac{3(2x+1)-2(3x-4)}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{6x+3-6x+8}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{11}{(2x+1)^2}$$

On peut aussi utiliser la formule $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-4}{2x+1}\right)'$$
$$=\frac{3\times1-2\times(-4)}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{11}{(2x+1)^2}$$

4. $f(x)=\dfrac{8+3x}{1-6x}$ $\qquad$ $I=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{6}\right\}$

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com
WhatsApp : 0717467136

On peut utiliser la formule $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

Donc $f'(x) = \left(\dfrac{8+3x}{1-6x}\right)'$

$$= \dfrac{\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{(1-6x)^2}$$

$$= \dfrac{26}{(1-6x)^2}$$

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x-8}$ $\qquad I = \mathbb{R}^+ \setminus \{4\}$

f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

$$f'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{2x-8}\right)'$$

$$= \dfrac{(\sqrt{x})'(2x-8) - \sqrt{x}(2x-8)'}{(2x-8)^2}$$

$$= \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2x-8) - 2\sqrt{x}}{(2x-8)^2}$$

$$= \dfrac{\sqrt{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(2x-8)^2}$$

$$= \dfrac{-\dfrac{4}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(2x-8)^2}$$

$$= \dfrac{-4-x}{(2x-8)^2\sqrt{x}}$$

$$= -\dfrac{x+4}{(2x-8)^2\sqrt{x}}$$

6. $f(x)=\dfrac{x^2+18x}{6x+4}$ $\qquad I=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$

f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+18x\right)'(6x+4)-\left(x^2+18x\right)(6x+4)'}{(6x+4)^2}$$

$$=\frac{(2x+18)(6x+4)-6\left(x^2+18x\right)}{(6x+4)^2}$$

$$=\frac{12x^2+116x+72-6x^2-108x}{(6x+4)^2}$$

$$=\frac{6x^2+8x+72}{(6x+4)^2}$$

7. $f(x)=\dfrac{3x-2}{2x^2-3x+5}$ $\qquad I=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(\frac{(3x-2)}{\left(2x^2-3x+5\right)}\right)'$$

$$=\frac{(3x-2)'\left(2x^2-3x+5\right)-(3x-2)\left(2x^2-3x+5\right)'}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}$$

$$=\frac{3\left(2x^2-3x+5\right)-(3x-2)(4x-3)}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}$$

$$=\frac{6x^2-9x+15-\left(12x^2-17x+6\right)}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}$$

$$=\frac{-6x^2+8x+9}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\dfrac{10x+4}{5x^2+1}$.

1. *Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'expression de $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.*

2. *En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.*

3. *Donner l'équation de la tangente à la courbe représentant f au point A d'abscisse 0.*

4. *Étudier la position relative de cette tangente et de la courbe représentant la fonction f.*

Correction

1. *f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas ; est pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a :*

$$f'(x) = \frac{(10x+4)'(5x^2+1)-(10x+4)(5x^2+1)'}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{10(5x^2+1)-10x(10x+4)}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{50x^2+10-100x^2-40x}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-50x^2-40x+10}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-10(5x^2+4x-1)}{(5x^2+1)^2}$$

2. *On déduit que le signe de* $f'(x)$ *est le signe contraire de* $5x^2+4x-1$

Donc étudions le signe de $5x^2+4x-1$

Le discriminant est : $\Delta = 4^2-4\times5\times(-1)=36$

D'où le polynôme admet deux racines : $x_1 = \frac{-4-\sqrt{36}}{2} = -5 \; et \; x_2 = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = 1$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$5x^2+4x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-0,36$	$\nearrow$	$2,33$	$\searrow$	0

3. On a : $f'(0)=10$ *et* $f(0)=4$*; donc l'équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse* 0 *est :* $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$$=10x+4$$

4. Pour déterminer la position relative de la courbe de f et la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 0 *; on étudie le signe de* $f(x)-(10x+4)$

On a : $f(x)-(10x+4)=\dfrac{10x+4}{5x^2+1}-(10x+4)$

$$=(10x+4)\left(\frac{1}{5x^2+1}-1\right)$$

$$=(10x+4)\left(\frac{1-5x^2-1}{5x^2+1}\right)$$

$$=-(10x+4)\left(\frac{5x^2}{5x^2+1}\right)$$

Et comme $\dfrac{5x^2}{5x^2+1}\geq 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *; donc le signe de* $f(x)-(10x+4)$ *est le contraire de celui de* $(10x+4)$ *; on obtient le tableau récapulatif suivant :*

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
$(10x+4)$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(10x+4)$		$+$	0	$-$	
position relative de la courbe de f et la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 0	*la courbe de f est au-dessus de la tangente*			*la courbe de f est au-dessous de la tangente*	

Exercice 3

Dans chacun des cas, déterminer l'expression de $f'(x)$

1. $f(x)=4x^3-5x^2+x-1$
2. $f(x)=5x^3+\frac{1}{x}+3\sqrt{x}$
3. $f(x)=(x^2+1)(x^3-2x)$

Correction

1. *f est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(car f est un polynôme) ; et pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *; on a :*
   $f'(x)=12x^2-10x+1$
2. $f(x)=5x^3+\frac{1}{x}+3\sqrt{x}$

   f est dérivable sur $]0;+\infty[$ *(comme somme de trois fonctions dérivable sur* $]0;+\infty[$ *;*
   $x\mapsto 5x^3$ *;* $x\mapsto \frac{1}{x}$ *et* $x\mapsto 3\sqrt{x}$ *) ; et pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *; on a :*

   $f'(x)=15x-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2\sqrt{x}}$

3. *f est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(comme produit de deux polynômes) ; et pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *; on a :*

$$\begin{aligned}
f'(x)&=(x^2+1)'(x^3-2x)+(x^2+1)(x^3-2x)'\\
&=2x(x^3-2x)+(x^2+1)(3x^2-2)\\
&=2x^4-4x^2+3x^4-2x^2+3x^2-2\\
&=5x^4-3x^2-2
\end{aligned}$$

Exercices 4 :

Dans chacun des cas, déterminer l'expression de $f'(x)$

1. $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$
2. $f(x)=-x+2+\frac{2}{3x}$
3. $f(x)=\frac{1}{x+x^2}$

Correction

1. f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas ; est pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ *; on a :*

$$f'(x) = \frac{(2x-1)'(x+1) - (2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{3}{(x+1)^2}$$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ *(comme somme de deux fonctions dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *;* $x \mapsto -x+2$ *et* $x \mapsto \frac{2}{3x}$ *) ; et pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ *; on a :* $f'(x) = -1 - \frac{2}{3x^2}$

$$= -\left(1 + \frac{2}{3x^2}\right)$$

3. f est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R} - \{0;-1\}$ *comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas ; est pour tout* $x \in \mathbb{R} - \{0;-1\}$ *;*

on a : $f'(x) = -\frac{(x+x^2)'}{(x+x^2)^2}$

$$= -\frac{2x+1}{(x+x^2)^2}$$