Série n° 2 exercices corrigés sur les suites

Terminale S

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ pour tout entier naturel n

1) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n

2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$; $n! \geq 2^{n-1}$

3) Montrer que : $u_n \leq 1 + \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^{2-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout entier naturel n

4) Calculer en fonction de n la somme $S_n = 1 + \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^{2-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$

5) Montrer que la suite (u_n) est majorée ; puis déduire qu'elle est convergente.

Correction

1) Pour tout entier naturel n ; on a :

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

$= \frac{1}{(n+1)!}$ qui est strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Démontrons par récurrence que $n! \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Initialisation :

$1! = 1$ et $2^{1-1} = 1$ donc la propriété est initialisée au rang 1 puisque $1! \geq 2^{1-1}$.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un certain rang p.

Supposons donc $p! \geq 2^{p-1}$ pour un certain $p \geq 1$ donné.

Démontrons que la propriété est héréditaire et donc qu'elle est vraie pour le rang $p+1$.

$(p+1)! = (p+1)p!$ donc $(p+1)! \geq (p+1) \times 2^{p-1}$.

Or $p \geq 1$ donc $(p+1) \geq 2$ d'où $(p+1)! \geq 2 \times 2^{p-1}$.

Alors $(p+1)! \geq 2^{(p+1)-1}$

Donc la propriété est vraie au rang $p+1$.

<u>Conclusion :</u>

La propriété est initialisée au rang 1, et la propriété est héréditaire.

En conclusion, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc $n! \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$

3) On a : $k! \geq 2^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$ d'après la question 2)

Donc $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^{2-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

D'où $u_n \leq 1 + \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^{2-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

4) On remarque que $\frac{1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^{2-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1.

On a donc $\frac{1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^{2-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5) D'après la question 4), comme $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

D'où, d'après la question 4), $u_n \leq 1+2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (u_n) est majorée par 3.

(u_n) *est croissante et majorée donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone.*

Exercice 2

Etudier la monotonie de de chacune des suites suivantes.

- $u_n = 5n^2 - 4n$ *; pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
- $v_n = n^2 - 4n$ *; pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
- $w_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ *; pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
- $u_0 = 2 \;\; u_{n+1} = \sqrt{7} u_n$ *; pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Correction

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; on a :* $u_{n+1} - u_n = 5(n+1)^2 - 4(n+1) - (5n^2 - 4n)$.

$$= 5(n^2 + 2n + 1) - 4n - 4 - 5n^2 + 4n$$

$$= 5n^2 + 10n + 5 - 4n - 4 - 5n^2 + 4n$$

$$= 10n + 1$$

Donc $v_{n+1} - v_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *càd; d'où la suite* (u_n) *est strictement croissante.*

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; on a :* $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - 4(n+1) - (n^2 - 4n)$

$$= (n^2 + 2n + 1) - 4n - 4 - n^2 + 4n$$

$$= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 - n^2 + 4n$$

$$= 2n - 3$$

Donc $v_{n+1} - v_n > 0$ *pour tout* $n \geq \frac{3}{2}$ *càd* $n \geq 2$ *; d'où la suite* (v_n) *est strictement croissante à partie du rang 2.*

- $w_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ *; pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme 3.

Or $\frac{3}{2} > 1$ et $3 > 0$ donc (w_n) est strictement croissante.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{7}$.

$\sqrt{7} > 1$ et la suite (u_n) est positive pour tout n .

Donc (u_n) est une suite croissante.

Exercice 3

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ; $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$

Correction

Initialisation : Pour $n = 0$, $5^{0+2} = 25$ et $4^{0+2} + 3^{0+2} = 25$. On a donc $5^{0+2} \geq 4^{0+2} + 3^{0+2}$.
La propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie au rang p où $p \in \mathbb{N}$ (fixé).

On a donc $5^{p+2} \geq 4^{p+2} + 3^{p+2}$.

Alors $5 \times 5^{p+2} \geq 5 \times \left(4^{p+2} + 3^{p+2}\right)$

$$\geq 5 \times 4^{p+2} + 5 \times 3^{p+2}$$

. Or $5 \geq 4$ et $5 \geq 3$ donc $5 \times 4^{p+2} + 5 \times 3^{p+2} \geq 4 \times 4^{p+2} + 3 \times 3^{p+2}$.

D'où $5 \times 5^{p+2} \geq 4 \times 4^{p+2} + 3 \times 3^{p+2}$.

Alors $5^{p+3} \geq 4^{p+3} + 3^{p+3}$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$ pour tout n

Exercice 4

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Correction

Démontrons cette propriété par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation :

Pour $n=1$, $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}=1=1^3$.

Donc la propriété est initialisée au rang 1.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie au rang p où p est un entier non nul fixé.

On admet donc que : $1^3+2^3+3^3+\cdots+p^3=\dfrac{p^2(p+1)^2}{4}$ *et montrons que*

$1^3+2^3+3^3+\cdots+p^3+(p+1)^3=\dfrac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$.

On a par hypothèse de récurrence que $1^3+2^3+3^3+\cdots+p^3=\dfrac{p^2(p+1)^2}{4}$

Donc $1^3+2^3+3^3+\cdots+p^3+(p+1)^3=\dfrac{p^2(p+1)^2}{4}+(p+1)^3$

$$=\frac{p^2(p+1)^2+4(p+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(p+1)^2\left(p^2+4(p+1)\right)}{4}$$

$$=\frac{(p+1)^2\left(p^2+4p+4\right)}{4}$$

$$=\frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : *On a ;* $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ *pour tout* $n\geq 1$

Exercice 5

Montrer que pour tout entier naturel n ; $1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$

Correction

Démontrons cette propriété par récurrence sur n .

Initialisation :

Pour $n=0$, $(0+1)^2=1=(2\times 0+1)$ *donc la propriété est initialisée.*

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie au rang p où p est un entier naturel fixé.

Càd $1+3+5+\cdots+(2p+1)=(p+1)^2$ *et montrons que*

$1+3+5+\cdots+(2p+1)+(2p+3)=(p+2)^2$.

Par hypothèse de récurrence on a : $1+3+5+\cdots+(2p+1)=(p+1)^2$

Donc $1+3+5+\cdots+(2p+1)+(2p+3)=(p+1)^2+2p+3$

$$=p^2+2p+1+2p+3$$

$$=p^2+4p+4$$

$$=(p+2)^2$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : *On a* $1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$ *pour tout entier naturel n.*

Exercice 6

Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_0=0$ *et* $u_{n+1}=\frac{u_n}{5}-4$ *pour tout entier naturel n.*

1. Donner une conjoncture pour la monotonie de (u_n)

2. Montrer par récurrence votre conjoncture.

Correction

1. On a : $u_0 = 0$; $u_1 = \frac{0}{5} - 4 = -4$; $u_2 = \frac{-4}{5} - 4 = \frac{-24}{5}$ et $u_3 = \frac{-24}{5} - 4 = \frac{-44}{5}$

Donc (u_n) semble être décroissante.

2. Montrons par récurrence que $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier naturel n.

Initialisation :

$u_0 = 0$ et $u_1 = -4$ donc $u_1 < u_0$.

La propriété est initialisée.

Hérédité :

Supposons que $u_{p+1} < u_p$ avec p un entier naturel fixé et montrons que $u_{p+2} < u_{p+1}$.

Par hypothèse de récurrence on a : $u_{p+1} < u_p$

Donc $\frac{u_{p+1}}{5} - 4 < \frac{u_p}{5} - 4$.

D'où $u_{p+2} < u_{p+1}$ donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier naturel n .

Donc (u_n) est décroissante.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{7u_n}{4} + 1$ pour tout entier naturel n.

1. Donner une conjoncture pour la monotonie de (u_n)

2. Montrer par récurrence votre conjoncture.

Correction

1. On a : $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{7 \times 1}{4} + 1 = \frac{11}{4} \simeq 2{,}75$; $u_2 = \frac{7 \times \frac{11}{4}}{4} + 1 = \frac{93}{16} \simeq 5{,}81$ et

$u_3 = \frac{7 \times \frac{93}{16}}{4} + 1 = \frac{715}{64} \simeq 11{,}17$

La suite (u_n) semble être croissante.

2. Utilisons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{7}{4}x+1$

f est une fonction affine de coefficient directeur $\frac{7}{4}>0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ et on a : $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Montrons par récurrence sur n que $u_{n+1}\geq u_n$.

***Initialisation** :*

D'après a, $u_1=\frac{11}{4}$ et $u_0=1$; donc $u_1\geq u_0$ alors la propriété est initialisée.

Hérédité :

Supposons que $u_{p+1}\geq u_p$ avec p un entier naturel fixé et montrons que $u_{p+2}\geq u_{p+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence $u_{p+1}\geq u_p$, et comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ on a : $f(u_{p+1})\geq f(u_p)$ soit $u_{p+2}\geq u_{p+1}$.

Donc la propriété est héréditaire.

***Conclusion** :*

$u_{n+1}\geq u_n$ pour tout entier naturel n.

Donc (u_n) est croissante.