Ordre et opérations **2éme AC**

Objectifs

Manipuler des inégalités peut être utile pour la résolution d'inéquations ($3^{ème}$) ou tout simplement pour comparer 2 nombres.

Comment les opérations $(+;-;\times \text{ et } \div)$ influent sur les inégalités ? Comment comparer deux nombres ?

1. Inégalités

Une ***inégalité*** *est composée de* ***2 membres*** *séparés par un des symboles < ; > ; ≤ ou ≥.*

Notations :

- < se lit « **strictement inférieur** » et > « **strictement supérieur** »
- ≤ se lit « **inférieur ou égal** » et ≥ « **supérieur ou égal** »

2. Ordre et opérations

On ***ne change pas le sens*** *d'une inégalité si on* ***additionne*** *(ou* ***soustrait****) chacun de ses membres par un* ***même nombre****.*

En écriture mathématique : soient a, b et c des nombres quelconques :

Si $a<b$ alors $a+c<b+c$ et $a-c<b-c$.

Exemples :

- Si $4\leq x$ alors $4+5\leq x+5$ d'où $9\leq x+5$.
- Si $a>14$ alors $a-8>14-8$ d'où $a-8>6$.

On ***ne change pas le sens*** *d'une inégalité si on* ***multiplie*** *(ou* ***divise****) chacun de ses membres par un* ***même nombre positif****.*

En écriture mathématique : soient a, b et c des nombres quelconques avec $c>0$.

Si $a<b$ **(respectivement** $a>b$**) alors** $a\times c<b\times c$ et $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ **(respectivement** $a\times c>b\times c$ et $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$**).**

Exemples :

Si $4<x$ alors $3\times 4<3x$ d'où $12<3x$.

Si $x\geq 28$ alors $\frac{x}{7}\geq\frac{28}{7}$ d'où $\frac{x}{7}\geq 4$

On ***change le sens*** *d'une inégalité si on* ***multiplie*** *(ou* ***divise****) chacun de ses membres par un* ***même nombre négatif****.*

En écriture mathématique : soient a, b et c des nombres quelconques avec $c<0$.

Si $a<b$ **(respectivement** $a>b$**) alors** $a\times c>b\times c$ et $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ **(respectivement** $a\times c<b\times c$ et $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$**).**

Exemples :

Si $4<x$ **alors** $-3\times 4>-3x$ d'où $-12<-3x$

Si $x\geq 28$ alors $\frac{x}{-7}\leq\frac{28}{-7}$ d'où $-\frac{x}{7}\leq -4$.

Remarque :

Toutes les règles vues précédemment seraient identiques avec **> ; ≤** ou ≥.

3. Comparaison de deux nombres

1. Comparaison de nombres relatifs.

1.1. Comparaison de deux nombres positifs .

Règle 1 :

Pour comparer deux nombres positifs en écriture décimale, on compare successivement les décimales de même rang.

Exemple : $m=61,32564998$ et $n=61,32571$ donc $m<n$.

Règle 2 :

Pour comparer deux nombres positifs en écriture fractionnaire, il faut d'abord les réduire au même dénominateur, puis les ranger dans l'ordre de leur numérateur.

Exemple : Comparer $\frac{9}{7}$ et $\frac{7}{6}$.

$\frac{9}{7}=\frac{9\times 6}{7\times 6}=\frac{54}{42}$ et $\frac{7}{6}=\frac{7\times 7}{6\times 7}=\frac{49}{42}$ d'où : $\frac{9}{7}>\frac{7}{6}$.

1.2. Comparaison de deux nombres relatifs.

Règle 3 : *Pour comparer deux nombres relatifs, on distingue trois cas :*

- *1er cas : Si les deux nombres sont positifs, on utilise les règles 1 et 2 ou d'autres .*
- *2e cas : Si les deux nombres sont de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif.*
- *3e cas : Si les deux nombres sont négatifs, ils sont rangés dans l'ordre inverse de leurs opposés.*

Exemple : $m=-61,32564998$ et $n=-61,32571$ donc $m<n$.

$m=\frac{3}{4}$ et $n=-\frac{5}{4}$ donc $m>n$.

Règle 4 : *Comparer deux nombres relatifs, revient à étudier le signe de leur différence :*

- *dire que a - b < 0 revient à dire que a < b.*
- *dire que a - b > 0 revient à dire que a > b.*

Savoir : *Autres méthodes de comparaison*

Règle de transitivité : Si $x<y$ et $y<z$ alors $x<z$.

Comparaison de fractions de même numérateur :

Elles sont classées dans l'ordre inverse de leur dénominateur.
*Pour **comparer** deux nombres a et b, il suffit de regarder leur différence :*

- Si $a-b>0$ alors $a>b$
- Si $a-b<0$ alors $a<b$

Exemple :
Soit x un nombre tel que x + 4 > 0. x Est-il forcément positif ?
Si $x+4>0$ *alors* $x>0$ *(cela n'implique pas que* $x>0$*)*
Par exemple $x=-2$ *vérifie l'inégalité. Donc x n'est pas forcément positif.*

2. Ordre et opération.

2.1. Ordre et addition.

Règle 5 : *Soit trois nombres a, b, et c. Les nombres a + c et b + c sont rangés dans le même ordre que les nombres a et b.*

Exemple : $M=-23+27,1$ et $N=-19+27,1$. On a : $-23<-19$ d'où $M<N$.

2.2. Ordre et multiplication.

Règle 6 : *Soit trois nombres a, b, et k. Les nombres ka et kb sont rangés :*
si k est strictement positif, dans le même ordre que les nombres a et b.
Exemple : $M=9\times 7,8$ et $N=9\times 6,9$. On a : $6,9<7,8$ d'où $N<M$.

Remarque :
Si k est strictement négatif, les nombres ka et kb sont rangés dans l'ordre inverse des nombres a et b.
Exemple : $M=-7\times 2,7$ et $N=-7\times 1,2$. On a: $1,2<2,7$ d'où $M<N$.

3. Encadrements. Valeurs approchées.

Remarque : *Il faut faire très attention dans la manipulation des encadrements. Ainsi, si on veut montrer qu'un nombre x est compris entre deux nombres a et b, il est plus simple de montrer que x est plus grand que a et que x est plus petit que b. On peut alors utiliser toutes les règles vues ci-dessus, ainsi que la règle de transitivité.*

Remarque : *Il faut bien distinguer valeur approchée et troncature.*
Pour une troncature, on coupe le nombre à la précision voulue, sans s'occuper du morceau à droite de la coupure.
Pour une valeur approchée, on coupe le nombre à la précision voulue et on regarde le morceau de droite: si il commence par 0, 1, 2, 3 ou 4, l'arrondi est égal à la troncature. Sinon l'arrondi est égal à la troncature + la précision.

Exemple : *Soit m=67,9457*
La troncature au dixième de m est 67,9. L'arrondi au dixième de m est aussi 67,9.
La troncature au centième de m est 67,94. L'arrondi au centième de m est 67,95.

Exercice 1

Comparer les nombres a et b :

$a=\sqrt{2}$; $b=-\sqrt{12354}$

$a=-\frac{1154}{5}$; $b=\pi$

$a=3\sqrt{8}-5,99\sqrt{2}$; $b=5\sqrt{81}-45,01$

$a=7\sqrt{25}-5\sqrt{49}$; $b=15\sqrt{11}-8\sqrt{44}$

$a=-1-2-\pi+7$; $b=23\sqrt{11}-8\sqrt{99}$

Exercice 2

Comparer les nombres a et b dans chacun des cas suivants

1) $a=\frac{2154}{283}$; $b=\frac{2154}{113}$

2) $a=\frac{7\sqrt{25}-5\sqrt{49}}{121325}$; $b=\frac{\pi}{3121568}$

3) $a=\frac{18\sqrt{2}-2\sqrt{98}}{5487}$; $b=\frac{9\sqrt{32}-14\sqrt{8}}{5487}$

4) $a=\frac{\sqrt{4312}-1}{3\sqrt{50}-12}$; $b=\frac{\sqrt{4312}+1}{5\sqrt{18}-3\sqrt{16}}$