guessmaths

Série n ° 1 Exercices sur fonction exponentielle **Terminal S**

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes où x est un réel quelconque.

a) $\dfrac{e^{1+x}}{e^{x+2}}$

b) $\dfrac{e^{3x}+e^{x}}{e^{2x}+e^{x}}$

c) $\left(\dfrac{e}{e^{-x}}\right)^{4}$

Correction

on utilise la propriété $\dfrac{e^{a}}{e^{b}}=e^{a-b}$

a) $\dfrac{e^{1+x}}{e^{x+2}}=e^{1+x-(x+2)}$

$$=e^{1+x-(x+2)}$$
$$=e^{-1}$$
$$=\frac{1}{e}$$

On factorise par e^{x} *pour simplifier l'expression ; et ajoute* $2e^{x}$ *puis on la retranche pour faire apparaitre une identité remarquable*

b) $\dfrac{e^{3x}+e^{x}}{e^{2x}+e^{x}}=\dfrac{e^{x}\left(e^{2x}+1\right)}{e^{x}\left(e^{x}+1\right)}$

$$=\frac{e^{2x}+1}{e^{x}+1}$$
$$=\frac{e^{2x}+2e^{x}+1-2e^{x}}{e^{x}+1}$$
$$=\frac{\left(e^{x}+1\right)^{2}-2e^{x}}{e^{x}+1}$$
$$=\frac{\left(e^{x}+1\right)^{2}}{e^{x}+1}-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$$
$$=e^{x}+1-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$$

c) $\left(\dfrac{e}{e^{-x}}\right)^{4}=\dfrac{e^{4}}{\left(e^{-x}\right)^{4}}$

$$= \frac{e^4}{e^{-4x}}$$
$$= e^{4x+4}$$
$$= e^{4(x+1)}$$

Exercice 2 **Résoudre** *dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

a) $e^{2-x} = e^x$ *b)* $e^{2x+3} = 1$ *c)* $e^{5-x^2} = e$

d) $e^{-x} = 0$ *e)* $2e^{-x} = \dfrac{4}{e^x+1}$ *f)* $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Correction

a) $e^{2-x} = e^x$ *donc* $2 - x = x$
d'où $2x = 2$
donc $x = 1$ *par suite* $S = \{1\}$

b) $e^{2x+3} = e^0$ *donc*
d'où $2x + 3 = 0$
d'où $2x = -3$
donc $x = \dfrac{-3}{2}$ *par suite* $S = \left\{\dfrac{-3}{2}\right\}$

c) $e^{5-x^2} = e$ *donc* $5 - x^2 = 1$
d'où $4 - x^2 = 0$
d'où $x^2 = 4$
donc $x = -2$ *ou* $x = 2$ *par suite* $S = \{-2;2\}$

d) $e^{-x} = 0$ *comme* $e^x > 0$ *; alors l'équation* $e^{-x} = 0$ *n'admet pas de solution.*
Donc $S = \varnothing$

e) $2e^{-x} = \dfrac{4}{e^x+1}$ *donc* $2e^{-x}\left(e^x+1\right) = 4$
d'où $2\left(1 + e^{-x}\right) = 4$
donc $1 + e^{-x} = 2$
d'où $e^{-x} = 1$
d'où $e^{-x} = 1$
d'où $e^{-x} = e^0$
donc $-x = 0$
d'où $x = 0$
par suite $S = \{0\}$

f) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
On pose $X = e^x$

L'équation devient $X^2+X-2=0$

Est on ait amené à résoudre une équation du 2^éme^ degré

On calcule le discriminant $\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=9$

Donc l'équation admet deux solutions $X_1=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2$ *et* $X_2=\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=1$

Et comme on sait que $(\forall t\in\mathbb{R});e^t>0$

Alors la solution $X_1=-2$ *n'est pas possible ; d'où l'équation admet une seule solution* $X=1$

D'où $e^x=1$ *; donc* $x=0$

Alors $S=\{0\}$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation suivante :* $1-e^{x^2-1}>0$

Correction

On a : $1-e^{x^2-1}>0$ *; donc* $1>e^{x^2-1}$

D'où $e^{x^2-1}<e^0$

Donc $x^2-1<0$

Alors $0<x^2<1$

Donc $0<\sqrt{x^2}<1$

Donc $0<|x|<1$

D'où $-1<x<1$

Alors $S=]-1;1[$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes :*

a) $e^{2x}-e^{x+1}<0$

b) $1-e^{x-2}\geq0$

c) $e^x-\frac{1}{e^x}\leq0$

d) $\frac{1}{e^x}-e>0$

Correction

a) On a : $e^{2x}-e^{x+1}<0$ *; donc* $e^xe^x-e^xe<0$

$e^x(e^x-e)<0$ *et comme* $e^x>0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$

Alors $e^x-e<0$

D'où $e^x<e$

Donc $x<1$ $S=]-\infty;1[$

b) On a : $1-e^{x-2}\geq 0$; donc $e^{x-2}\leq 1$

$$e^{x-2}\leq e^{0}$$
$$x-2\leq 0$$
$$x\leq 2 \qquad S=\left]-\infty;2\right]$$

c) On a : $e^{x}-\frac{1}{e^{x}}\leq 0$; donc $e^{x}\leq\frac{1}{e^{x}}$

$$e^{2x}\leq 1$$
$$e^{2x}\leq e^{0}$$
$$2x\leq 0$$
$$x\leq 0 \qquad S=\left]-\infty;0\right]$$

d) On a : $\frac{1}{e^{x}}-e>0$; donc $\frac{1}{e^{x}}>e$

$$e^{x}e<1$$
$$e^{x+1}<e^{0}$$
$$x+1<0$$
$$x<-1 \qquad S=\left]-\infty;-1\right[$$

<u>Exercices 5:</u>

Résoudre des équations et inéquations avec des exponentielles en posant $X=e^{x}$ changement d'inconnue.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes,

a) $2e^{2x}-e^{x}=1$

b) $e^{2x}+2e^{x}-3\leq 0$

<u>Correction</u>

a) on a : $2e^{2x}-e^{x}=1$; donc $2e^{2x}-e^{x}-1=0$

Posons $X=e^{x}$; alors l'équation devient $2X^{2}-X-1=0$

Calculons le discriminant de l'équation en X de 2éme degré : $\Delta=(-1)^{2}-4\times 2\times(-1)=9$

Donc l'équation admet deux solutions : $X_{1}=\frac{1-\sqrt{9}}{4}=-\frac{1}{2}$ et $X_{2}=\frac{1+\sqrt{9}}{4}=1$

Et comme $e^{x}>0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *; alors la solution négative n'est pas valable d'où l'équation* $2e^{2x}-e^{x}=1$ *admet une seule solution telle que :* $e^{x}=X_{2}=1$; donc $x=0$

D'où $S=\{0\}$

b) On a : $e^{2x}+2e^{x}-3\leq 0$

Posons $X=e^{x}$; alors l'inéquation devient $X^{2}+2X-3\leq 0$

Pour étudier le signe du polynôme de deuxième degré cherchons les solution de l'équation
$X^2+2X-3=0$; $\Delta=(2)^2-4\times1\times(-3)=16$

Donc l'équation admet deux solutions : $X_1=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3$ *et* $X_2=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2}=1$

Dressons le tableau de signe de $\left(X^2+2X-3\right)$

X	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
X^2+2X-3		$+$	0		$-$		0	$+$	

Et comme on sait que $(\forall t\in\mathbb{R});e^t>0$

Alors l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle où $X>0$ *et* $X^2+2X-3\leq0$
càd $e^{2x}+2e^x-3\leq0$

Donc $S=[0;1]$

Exercices 6 :

Déterminer le signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$ *:*
a) $1-e^x$
b) $e^{2x}-1$
c) $e^{2x}-e^{x+1}$
d) $e^{x^2}-e^x$
e) $e^x-\dfrac{1}{e^x}$

Correction

a) On a : ► $1-e^x\leq0$ *; donc* $e^x\geq1$
$e^x\geq e^0$
$x\geq0$
► $1-e^x\geq0$ *; donc* $e^x\leq1$
$e^x\leq e^0$
$x\leq0$

D'où le tableau de signe de $1-e^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-e^x$		$+$	0	$-$	

b) On a : ► $e^{2x}-1\leq0$ *; donc* $e^{2x}\leq1$
$e^{2x}\leq e^0$
$2x\leq0$

$$x \le 0$$

▶ $e^{2x} - 1 \ge 0$; *donc* $e^{2x} \ge 1$

$$e^{2x} \ge e^{0}$$
$$2x \ge 0$$
$$x \ge 0$$

D'où le tableau de signe de $1 - e^{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{2x} - 1$	$-$	0	$+$

c) On a : ▶ $e^{2x} - e^{x+1} \le 0$; *donc* $e^{2x} \le e^{x+1}$

$$2x \le x + 1$$
$$x \le 1$$

▶ $e^{2x} - e^{x+1} \ge 0$; *donc* $e^{2x} \ge e^{x+1}$

$$2x \ge x + 1$$
$$x \ge 1$$

D'où le tableau de signe de $e^{2x} - e^{x+1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$e^{2x} - e^{x+1}$	$-$	0	$+$

d) On a : ▶ $e^{x^2} - e^{x} \le 0$; *donc* $e^{x^2} \le e^{x}$

$$x^2 \le x$$
$$x^2 - x \le 0$$
$$x(x-1) \le 0$$
$$\begin{cases} x \le 0 \\ x - 1 \ge 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ x - 1 \le 0 \end{cases}$$
$$\cancel{\begin{cases} x \le 0 \\ x \ge 1 \end{cases}} \quad ou \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 1 \end{cases}$$
$$0 \le x \le 1$$

▶ $e^{x^2} - e^{x} \ge 0$; *donc* $e^{x^2} \ge e^{x}$

$$x^2 \ge x$$
$$x^2 - x \ge 0$$
$$x(x-1) \ge 0$$
$$\begin{cases} x \le 0 \\ x - 1 \le 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \le 0 \\ x \le 1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

$$x \le 0 \quad ou \quad x \ge 1$$

D'où le tableau de signe de $e^{x^2} - e^x$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$e^{x^2} - e^x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

e) On a : ▶ $e^x - \dfrac{1}{e^x} \le 0$ *; donc* $e^x \le \dfrac{1}{e^x}$

$$e^{2x} \le 1$$
$$e^{2x} \le e^0$$
$$2x \le 0$$
$$x \le 0$$

▶ $e^x - \dfrac{1}{e^x} \ge 0$ *; donc* $e^x \ge \dfrac{1}{e^x}$

$$e^{2x} \ge 1$$
$$e^{2x} \ge e^0$$
$$2x \ge 0$$
$$x \ge 0$$

D'où le tableau de signe de $e^x - \dfrac{1}{e^x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - \dfrac{1}{e^x}$		$-$	0	$+$	

<u>Exercices 7:</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 1 - e^{-x}$

1) Démontrer que pour tout réel $x < 0$, $f(x) < 0$.

2) Démontrer que pour tout réel $x \ge 0$, $0 \le f(x) < 1$.

<u>Correction</u>

1) Soit x un réel tel que : $x < 0$, *donc* $-x > 0$

$$e^{-x} > e^0 \ .$$
$$e^{-x} > 1 \ .$$
$$e^{-x} - 1 > 0 \ .$$
$$1 - e^{-x} < 0 \ .$$
$$f(x) < 0 \ .$$

2) Soit x un réel tel que : $x \ge 0$, *donc* $-x \le 0$

$$e^{-x} \le e^{0} \ .$$

$$e^{-x} \le 1 \ .$$

$$1 - e^{-x} \ge 0 \ .$$

$$\begin{cases} 1 - e^{-x} \le 1 \\ 1 - e^{-x} \ge 0 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} f\left(x\right) \le 1 \\ f\left(x\right) \ge 0 \end{cases} .$$

$$0 \le f(x) < 1 \ .$$