THEME 8

RACINE CARREE

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1:

Simplifier les écritures suivantes :

$A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$ $B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$

$C = \sqrt{96} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$ $D = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$

Correction :

Les carrés parfaits : (sauf 1)

4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 100 , …

et la racine carrée de ces carrés parfaits :

$\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$,

$\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, …

▶ $A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$

Simplifions les différentes racines de cette expression.

Nous avons :

$\sqrt{20} = \sqrt{4\times5} = \sqrt{4}\times\sqrt{5} = 2\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9}\times\sqrt{5} = 3\times\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\sqrt{125} = \sqrt{25\times5} = \sqrt{25}\times\sqrt{5} = 5\times\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Remplaçons, dans l'expression A, ces racines carrées par leurs écritures simplifiées.

Nous avons :

$A = 2\times2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$

$A = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = (4 - 3 + 5)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ $A = 6\sqrt{5}$

Remarque : Une autre rédaction est souhaitée. Au lieu de simplifier séparément les différentes racines, nous pouvons, dans l'expression A, les simplifier simultanément.

▶ $B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{12}$

Nous avons successivement :

$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{4\times12} + 5\sqrt{4\times3}$

$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{4}\times\sqrt{12} + 5\sqrt{4}\times\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{3} - 3\times2\times\sqrt{12} + 5\times2\times\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{3} - 6\sqrt{12} + 10\sqrt{3}$

$B = 17\sqrt{3} - 6\sqrt{12}$

Nous devons continuer et simplifier $\sqrt{12}$

$B = 17\sqrt{3} - 6\sqrt{4}\times\sqrt{3} = 17\sqrt{3} - 6\times2\times\sqrt{3} = 17\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

La simplification de $\sqrt{48}$ a été exécutée en deux étapes. La rédaction pouvait être plus rapide en constatant que $48 = 16\times3$. Nous obtenons alors :

$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{16\times3} + 5\sqrt{4\times3}$

$B = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{16}\times\sqrt{3} + 5\sqrt{4}\times\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{3} - 3\times4\times\sqrt{3} + 5\times2\times\sqrt{3}$

$B = 7\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ $\qquad B = 5\sqrt{3}$

▶ $C = \sqrt{96} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$

Essayons de déterminer dans chaque radicande (nombre situé sous le radical) le carré parfait le plus grand possible.

$C = \sqrt{16\times 6} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{4\times 6} - 3\sqrt{9\times 6}$

$C = \sqrt{16}\times\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{4}\times\sqrt{6} - 3\sqrt{9}\times\sqrt{6}$

$C = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2\times 2\sqrt{6} - 3\times 3\sqrt{6}$

$C = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} - 9\sqrt{6} = -7\sqrt{6}$ $\qquad C = -7\sqrt{6}$

▶ $D = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$

$D = 2\sqrt{16\times 2} - 3\sqrt{25\times 2} + 6\sqrt{4\times 2}$

$2\sqrt{16}\times\sqrt{2} - 3\sqrt{25}\times\sqrt{2} + 6\sqrt{4}\times\sqrt{2}$

$D = 2\times 4\times\sqrt{2} - 3\times 5\times\sqrt{2} + 6\times 2\times\sqrt{2}$

$D = 8\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\qquad D = 5\sqrt{2}$

Exercice 2:

Simplifier les expressions suivantes :

$A = (\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2})$ $\qquad B = (2\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

$C = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ $\qquad D = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

$E = (3\sqrt{2} - 1)^2 - (2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

Correction :

▶ $A = (\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2})$

$A = \sqrt{2}\times 2 - \sqrt{2}\times\sqrt{2} - 1\times 2 + 1\times\sqrt{2} =$

$A = 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 - 2 + \sqrt{2}$ $\qquad$ mais $(\sqrt{2})^2 = 2$

$A = 2\sqrt{2} - 2 - 2 + \sqrt{2}$

$A = -4 + 3\sqrt{2}$ $\qquad A = -4 + 3\sqrt{2}$

▶ $B = (2\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

$B = 2\sqrt{2}\times\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\times\sqrt{5} - \sqrt{5}\times\sqrt{2} - \sqrt{5}\times\sqrt{5}$

$B = 2(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\times\sqrt{5} - \sqrt{5}\times\sqrt{2} - (\sqrt{5})^2$

Sachant que $(\sqrt{2})^2 = 2$, que $(\sqrt{5})^2 = 5$ et que $\sqrt{2}\times\sqrt{5} = \sqrt{5}\times\sqrt{2} = \sqrt{10}$, nous avons :

$B = 2\times 2 + 2\sqrt{10} - \sqrt{10} - 5 = 4 + 2\sqrt{10} - \sqrt{10} - 5 = -1 + \sqrt{10}$ $\qquad B = -1 + \sqrt{10}$

▶ $C = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$C = \sqrt{6}\times\sqrt{3} - \sqrt{6}\times\sqrt{2} + 2\times\sqrt{3} - 2\times\sqrt{2}$

$C = \sqrt{6\times 3} - \sqrt{6\times 2} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$C = \sqrt{18} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

Simplifions maintenant $\sqrt{18}$ et $\sqrt{12}$. Nous avons :

$C = \sqrt{9\times 2} - \sqrt{4\times 3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$C = \sqrt{9}\times\sqrt{2} - \sqrt{4}\times\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$C = 3\sqrt{2} \cancel{- 2\sqrt{3}} \cancel{+ 2\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ $\qquad C = \sqrt{2}$

<u>Remarque :</u> Il existait ici une autre façon de simplifier cette expression.

$C = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Le premier facteur $\sqrt{6} + 2$ peut s'écrire (en factorisant) :

$\sqrt{6} + 2 = \sqrt{2 \times 3} + (\sqrt{2})^2 = \underline{\sqrt{2}} \times \sqrt{3} + \underline{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})$

$C = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{2}\,\underline{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{2}\,[(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2]$

$C = \sqrt{2}\,[3 - 2] = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$

▶ $D = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

$D = [(\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2] - [(\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2]$

$D = [3 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + 5] - [3 - 2\sqrt{3}\sqrt{5} + 5]$

En écrivant $\sqrt{3}\sqrt{5}$ sous la forme $\sqrt{15}$ et en supprimant les parenthèses, nous obtenons :

$D = 3 + 2\sqrt{15} + 5 - 3 + 2\sqrt{15} - 5 = 2\sqrt{15} + 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$ $\qquad D = 4\sqrt{15}$

▶ $E = (3\sqrt{2} - 1)^2 - (2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

$E = [(3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 1 + 1^2] - (2(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)$

$E = [3^2(\sqrt{2})^2 - 6\sqrt{2} + 1] - (2 \times 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)$

$E = [9 \times 2 - 6\sqrt{2} + 1] - (4 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)$

$E = [18 - 6\sqrt{2} + 1] - (4 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1)$ ou $E = [19 - 6\sqrt{2}] - (3 - \sqrt{2})$

$E = 18 - 6\sqrt{2} + 1 - 4 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1$ ou $E = 19 - 6\sqrt{2} - 3 + \sqrt{2}$

$E = 16 - 5\sqrt{2}$

$E = 16 - 5\sqrt{2}$

Exercice 3:

On donne les nombres : $a = 2\sqrt{5} - 3$ et $b = 2\sqrt{5} + 3$

Calculer $a + b$, $a - b$, $a^2 + b^2$, ab et $(a + b)^2$

Correction :

▶ Calcul de $a + b$:

Remplaçons a et b par les valeurs données ci-dessus.

Attention, toute valeur doit être considérée comme une valeur entre parenthèses (Il est vrai que si cette valeur est simple, les parenthèses sont omises)

Si $a = 2$, il faut lire $a = (2)$ (ici les parenthèses sont inutiles)

Si $a = -3$, il faut lire $a = (-3)$

Si $a = \sqrt{5}$, il faut lire $a = (\sqrt{5})$

Si $a = -3\sqrt{2}$, il faut lire $a = (-3\sqrt{2})$

Si $a = 2\sqrt{5} - 3$, il faut lire $a = (2\sqrt{5} - 3)$

$a + b = (2\sqrt{5} - 3) + (2\sqrt{5} + 3)$

$a + b = 2\sqrt{5} - 3 + 2\sqrt{5} + 3 = 4\sqrt{5}$ $\qquad a + b = 4\sqrt{5}$

▶ Calcul de $a - b$:

$a - b = (2\sqrt{5} - 3) - (2\sqrt{5} + 3)$

$a - b = 2\sqrt{5} - 3 - 2\sqrt{5} - 3 = -6$ $\qquad a - b = -6$

▶ Calcul de $a^2 + b^2$:

$a^2 + b^2 = (2\sqrt{5} - 3)^2 + (2\sqrt{5} + 3)^2$

$a^2 + b^2 = [(2\sqrt{5})^2 - 12\sqrt{5} + 3^2] + [(2\sqrt{5})^2 + 12\sqrt{5} + 3^2]$

$a^2 + b^2 = [2^2(\sqrt{5})^2 - 12\sqrt{5} + 9] + [2^2(\sqrt{5})^2 + 12\sqrt{5} + 9]$

$a^2 + b^2 = [4 \times 5 - 12\sqrt{5} + 9] + [4 \times 5 + 12\sqrt{5} + 9]$

$a^2 + b^2 = [20 - 12\sqrt{5} + 9] + [20 + 12\sqrt{5} + 9]$

$a^2 + b^2 = [29 - 12\sqrt{5}] + [29 + 12\sqrt{5}] = 29 - 12\sqrt{5} + 29 + 12\sqrt{5} = 58$

$a^2 + b^2 = 20 - 12\sqrt{5} + 9 + 20 + 12\sqrt{5} + 9 = 20 + 9 + 20 + 9 = 58$

$a^2 + b^2 = 58$

▶ Calcul de ab :

$ab = a \times b = (2\sqrt{5} - 3)(2\sqrt{5} + 3)$

$ab = (2\sqrt{5})^2 - 3^2 = 2^2(\sqrt{5})^2 - 3^2 = 4 \times 5 - 9 = 20 - 9 = 11$ $\qquad ab = 11$

▶ Calcul de $(a + b)^2$:

$(a + b)^2 = [(2\sqrt{5} - 3) + (2\sqrt{5} + 3)]^2$

$(a + b)^2 = [2\sqrt{5} - 3 + 2\sqrt{5} + 3]^2$

$(a + b)^2 = [4\sqrt{5}]^2$

$(a + b)^2 = 4^2(\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$ $\qquad (a + b)^2 = 80$

Exercice 4: [redacted]

Prouver que $\sqrt{8} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$ est un nombre entier . (le symbole "x" est le symbole de la multiplication)

Correction :

$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ (d'après la propriété $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ qui doit également se lire $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$)

L'expression à calculer est donc égale à (nous appellerons A cette expression) :

$A = \sqrt{8 \times 2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$

$A = \sqrt{16} - 2\sqrt{25 \times 3} + 5\sqrt{4 \times 3}$

$A = 4 - 2\sqrt{25} \times \sqrt{3} + 5\sqrt{4} \times \sqrt{3}$

$A = 4 - 2 \times 5 \times \sqrt{3} + 5 \times 2 \times \sqrt{3}$

$A = 4 - 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 4$ $\qquad A = 4$ donc A est un entier

Remarque :

Le premier terme pouvait également être simplifier comme suit :

$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times (\sqrt{2})^2 = 2 \times 2 = 4$

Exercice 5:

Les côtés d'un triangle IJK ont pour longueurs :

$IJ = 2\sqrt{3} + 3 \qquad IK = 3\sqrt{3} - 2 \qquad$ et $\qquad JK = 2\sqrt{13}$

Démontrer que le triangle IJK est rectangle .

Correction :

Recherche du plus grand côté :

A l'aide de la calculatrice , nous constatons que :

$IJ = 2\sqrt{3} + 3 \approx 6,46 \qquad IK \; 3\sqrt{3} - 2 \approx 3,19 \qquad$ et $\qquad JK = 2\sqrt{13} \approx 7,21$

Par conséquent , si le triangle IJK est rectangle , il ne peut être rectangle qu'en I.

Le triangle IJK est-il rectangle en I ?

Nous avons (calculs séparés) :

▶ $JK^2 = (2\sqrt{13})^2 = 2^2 \times (\sqrt{13})^2 = 4 \times 13 = 52$

▶ $IJ^2 + IK^2 = (2\sqrt{3}+3)^2 + (3\sqrt{3}-2)^2$

$IJ^2 + IK^2 = [(2\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3} + 3^2] + [(3\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3} + 2^2]$

$IJ^2 + IK^2 = [2^2(\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3} + 9] + [3^2(\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3} + 4]$

$IJ^2 + IK^2 = [4 \times 3 + 12\sqrt{3} + 9] + [9 \times 3 - 12\sqrt{3} + 4]$

$IJ^2 + IK^2 = [12 + 12\sqrt{3} + 9] + [27 - 12\sqrt{3} + 4]$

Continuons le calcul dans chaque parenthèse ou supprimons les :

$IJ^2 + IK^2 = 12 + 12\sqrt{3} + 9 + 27 - 12\sqrt{3} + 4 = 12 + 9 + 27 + 4 = 52$

Ces deux calculs permettent d'écrire que :

$$JK^2 = IJ^2 + IK^2$$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I

Exercice 6: [redacted]

Soit l'expression $C = x^2 - 6x + 7$

a)Calculer C pour $x = \sqrt{5}$ et écrire le résultat sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des entiers relatifs .

b)Calculer C pour $x = 3 + \sqrt{2}$

Correction :

▶ Si $x = \sqrt{5}$, nous avons :

$C = (\sqrt{5})^2 - 6 \times \sqrt{5} + 7$

$C = 5 - 6 \times \sqrt{5} + 7 = 12 - 6\sqrt{5}$ $\qquad C = 12 - 6\sqrt{5}$

▶ Si $x = 3 + \sqrt{2}$ ou $(3 + \sqrt{2})$, nous avons :

$C = (3 + \sqrt{2})^2 - 6 \times (3 + \sqrt{2}) + 7$

$C = [3^2 + 6\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2] - 6 \times (3 + \sqrt{2}) + 7$

$C = [9 + 6\sqrt{2} + 2] - 6 \times (3 + \sqrt{2}) + 7$

$C = 9 + 6\sqrt{2} + 2 - 18 - 6\sqrt{2} + 7$

$C = 9 + 2 - 18 + 7 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 0$ $\qquad C = 0$

Exercice 7: [redacted]

Effectuer le calcul suivant en donnant le résultat sous la forme $a\sqrt{2}$, a étant un entier relatif .

$$B = 2\sqrt{8} - 8\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^3 - \sqrt{50}$$

Correction :

$B = 2\sqrt{8} - 8\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^3 - \sqrt{50}$

Si nous regardons l'expression, nous pouvons constater que nous devons simplifier chacun des termes .

$\sqrt{8}$ se simplifie sans problème, ainsi que $\sqrt{50}$. La difficulté provient du troisième terme $3(\sqrt{2})^3$.

Aucune propriété liant les racines carrées et l'élévation à la puissance 3 n'est connue. Revenons donc à la définition de l'élévation au cube.

Nous avons :

$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2}$

Remplaçons donc $(\sqrt{2})^3$ par $2 \times \sqrt{2}$

Nous avons :

$B = 2\sqrt{4 \times 2} - 8\sqrt{2} + 3 \times 2 \times \sqrt{2} - \sqrt{25 \times 2}$

$B = 2\sqrt{4} \times \sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 3 \times 2 \times \sqrt{2} - \sqrt{25} \times \sqrt{2}$

$B = 2 \times 2 \times \sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 3 \times 2 \times \sqrt{2} - 5 \times \sqrt{2}$

$B = 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$B = -3\sqrt{2}$

$B = -3\sqrt{2}$

Exercice 8: [redacted]

Développer et écrire le plus simplement possible :

$D = (4 + 5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} + 3)(3\sqrt{2} + 7)$

Correction :

$D = (4 + 5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} + 3)(3\sqrt{2} + 7)$

$D = [4^2 + 40\sqrt{2} + (5\sqrt{2})^2] + (6(\sqrt{2})^2 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21)$

$D = [16 + 40\sqrt{2} + 5^2 \times (\sqrt{2})^2] + (6 \times 2 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21)$

$D = [16 + 40\sqrt{2} + 25 \times 2] + (12 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21)$

$D = [16 + 40\sqrt{2} + 50] + (12 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21)$

$D = 16 + 40\sqrt{2} + 50 + 12 + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 21$

$D = 16 + 50 + 12 + 21 + 40\sqrt{2} + 14\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 99 + 63\sqrt{2}$

$D = 99 + 63\sqrt{2}$