



## Série n° 4 exercices corrigés sur les suites

guessmaths

Terminale S

### Exercice 1

Dans chacune des cas suivants, démontrer que la suite est bornée en déterminant un majorant et un minorant de la suite.

1)  $(U_n)$  est définie par :  $U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$

2)  $(V_n)$  est définie par :  $V_n = \frac{(-1)^n n^2 - \sin(n)}{n^2 + 1}$

3)  $(W_n)$  est définie par :  $W_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

4)  $(t_n)$  est définie par :  $t_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$

### Correction

1)  $U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$  ; pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$U_n$  est la somme des  $(n+1)$  d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  et de premier terme

$$\begin{aligned} U_0 = 1 ; \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N} ; \text{ on a : } U_n &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Et comme  $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 1$  ; alors  $U_n \leq \frac{3}{2}$

$U_n$  est la somme des  $(n+1)$  termes positifs ; alors  $0 \leq U_n$

On conclut que  $(U_n)$  est bornée et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ; on a :  $0 \leq U_n \leq \frac{3}{2}$

[www.guessmaths.co](http://www.guessmaths.co) E-mail : [abdelaliguessouma@gmail.com](mailto:abdelaliguessouma@gmail.com) WhatsApp : 0717467136

$$2) V_n = \frac{(-1)^n n^2 - \sin(n)}{n^2 + 1}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a ; pour tout } n \in \mathbb{N} : \begin{cases} -1 \leq (-1)^n \leq 1 \\ -1 \leq -\sin(n) \leq 1 \\ n^2 > 0 \end{cases} ; \text{ donc } \begin{cases} -n^2 \leq (-1)^n n^2 \leq n^2 \\ -1 \leq -\sin(n) \leq 1 \\ \frac{1}{n^2 + 1} > 0 \end{cases}$$

$$D'où \begin{cases} -n^2 - 1 \leq (-1)^n n^2 - \sin(n) \leq n^2 + 1 \\ \frac{1}{n^2 + 1} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } -\frac{(n^2 + 1)}{n^2 + 1} \leq \frac{(-1)^n n^2 - \sin(n)}{n^2 + 1} \leq \frac{n^2 + 1}{n^2 + 1}$$

On conclut que pour tout  $n \in \mathbb{N} : -1 \leq V_n \leq 1$

### Exercice 2

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{k+1}$

Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

### Correction

$$\blacktriangleright \text{ On a : } u_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{3^k}{k+1} = \frac{3}{2}$$

$$\blacktriangleright \text{ On a : } u_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{3^k}{k+1} = \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2+1} = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

$$\blacktriangleright \text{ On a : } u_3 = \sum_{k=1}^3 \frac{3^k}{k+1} = \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2+1} + \frac{3^3}{3+1}$$

$$= \frac{3}{2} + 3 + \frac{27}{4} = \frac{45}{4}$$

$$\blacktriangleright \text{ On a : } u_4 = \sum_{k=1}^4 \frac{3^k}{k+1} = \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2+1} + \frac{3^3}{3+1} + \frac{3^4}{4+1}$$

$$= \frac{3}{2} + 3 + \frac{27}{4} + \frac{81}{5} = \frac{549}{20}$$

► On a :  $u_5 = \sum_{k=1}^5 \frac{3^k}{k+1} = \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2+1} + \frac{3^3}{3+1} + \frac{3^4}{4+1} + \frac{3^5}{5+1}$

$$= \frac{3}{2} + 3 + \frac{27}{4} + \frac{81}{5} + \frac{3^5}{6}$$

$$= \frac{549}{20} + \frac{81}{2} = \frac{1359}{20}$$

### Exercice 3

Soit  $a$  un réel fixé

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

1) Exprimer  $1 - u_{n+1}$  en fonction de  $1 - u_n$

2) En déduite  $1 - u_{n+2}$  en fonction de  $1 - u_n$ .

### Correction

1) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$  ; donc  $1 - u_{n+1} = 1 - 2u_n + u_n^2$

$$= (1 - u_n)^2$$

2) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $1 - u_{n+1} = (1 - u_n)^2$

Donc  $1 - u_{n+2} = (1 - u_{n+1})^2$

D'où  $1 - u_{n+2} = ((1 - u_n)^2)^2$

Alors  $1 - u_{n+2} = (1 - u_n)^4$

### Exercice 4

Suit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

2) Exprimer  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$  fonction de  $n$ .

**Correction**

1) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)}$   
$$= \frac{1}{n(n+1)} = u_n$$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

2) On a :  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$   
$$= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$
$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{n}{n+1}$$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $S_n = \frac{n}{n+1}$

**Exercice 5**

Déterminer dans chacune des cas si la suite  $(u_n)$  est géométrique ou non. Si c'est le cas, donner sa raison et son premier terme ; puis déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $u_n = 3e^{n-2}$

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $u_n = 5^n - 4 \times 5^{n+2}$

3)  $u_0 = -3$  et  $5u_{n+1} - 3u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

4)  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 3u_n - 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

**Correction**

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $u_n = 3e^{n-2}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ; on a :  $u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3e^{n-1}}{3e^{n-2}} = e$  ; donc  $u_{n+1} = e \times u_n$

D'où la suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q = e$  et de premier terme  $u_0 = 3e^{-2}$

On a déjà l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  :  $u_n = 3e^{-2} \times e^n = 3e^{n-2}$

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $u_n = 5^n - 4 \times 5^{n+2}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $u_{n+1} = 5^{n+1} - 4 \times 5^{n+1+2}$

$$= 5 \times (5^n - 4 \times 5^{n+2})$$

$$= 5 \times u_n$$

D'où la suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q = 5$  et de premier terme  $u_0 = -99$

On a déjà l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  :  $u_n = -99 \times 5^n = 5^n - 4 \times 5^{n+2}$

3)  $u_0 = -3$  et  $5u_{n+1} - 3u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $5u_{n+1} - 3u_n = 0$

Donc  $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n$

D'où la suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{3}{5}$  et de premier terme  $u_0 = -3$

Et l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  :  $u_n = -3 \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{-3^{n+1}}{5^n}$

4)  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 3u_n - 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

Supposons que la suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$  ; on aura  $u_{n+1} = qu_n$

Donc  $qu_n = 3u_n - 2$

**1<sup>er</sup> cas**  $q \neq 3$

$$D'o\grave{u} u_n = \frac{2}{3-q} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite  $(u_n)$  est constante donc g\u00e9om\u00e9trique de raison  $q=1$

2\u00e9me cas  $q=3$

$$\text{Donc } 3u_n = 3u_n - 2$$

$$D'o\grave{u} 0 = -2$$

Ce qui est absurde donc la suite  $(u_n)$  ne peut pas \u00eatre g\u00e9om\u00e9trique

### Exercice 6

Le but de cet exercice est de calculer la somme  $S_n$  par :  $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{n \text{ chiffres } 1}$

a) En multipliant  $S_n$  par 9, et en rempla\u00e7ant  $\underbrace{999\dots9}_{n \text{ chiffres } 1}$  par  $10^n - 1$ ; d\u00e9montrer que

$$S_n = \frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

b) Confirmer ce r\u00e9sultat par une d\u00e9monstration par r\u00e9currence.

### Correction

a) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{n \text{ chiffres } 1}$

$$\text{Donc } 9S_n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{n \text{ chiffres } 1}$$

$$= 10^1 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1$$

$$= \underbrace{10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n}_{\text{somme d'une suite g\u00e9om\u00e9trique raison } q=10} - \left( \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} \right)$$

$$= 10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$$

$$= \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$$

$$= \frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{9}$$

b) Confirmons par une démonstration par récurrence que  $S_n = \frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Initialisation**

**Pour  $n = 1$**  On a  $S_1 = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111 \dots 1}_{1 \text{ chiffres } 1} = 1$  et  $\frac{10^{1+1} - 9(1+1) - 1}{81} = 1$

Donc la propriété est initialisée

**Hérédité**

Soit  $p$  un entier naturel fixé ; supposons que :  $S_p = \frac{10^{p+1} - 9(p+1) - 1}{81}$  et montrons que

$$S_{p+1} = \frac{10^{p+2} - 9(p+2) - 1}{81}$$

On a :  $S_{p+1} = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111 \dots 1}_{p \text{ chiffres } 1} + \underbrace{111 \dots 1}_{(p+1) \text{ chiffres } 1}$

$$= S_p + \underbrace{111 \dots 1}_{(p+1) \text{ chiffres } 1}$$

Hyp.Rec :  $S_p = \frac{10^{p+1} - 9(p+1) - 1}{81}$

Donc  $S_{p+1} = \frac{10^{p+1} - 9(p+1) - 1}{81} + \underbrace{111 \dots 1}_{(p+1) \text{ chiffres } 1}$

$$= \frac{10^{p+1} - 9(p+1) - 1}{81} + 10^p + 10^{p-1} + \dots + 10^0$$

$$= \frac{10^{p+1} - 9(p+1) - 1}{81} + \frac{10^{p+1} - 1}{10 - 1}$$

$$= \frac{10^{p+1} - 9(p+1) - 1 + 9 \times 10^{p+1} - 9}{81}$$

$$= \frac{10^{p+1} + 9 \times 10^{p+1} - 9(p+2) - 1}{81}$$

$$= \frac{10 \times 10^{p+1} - 9(p+2) - 1}{81}$$

$$= \frac{10^{p+2} - 9(p+2) - 1}{81}; \text{ donc la propriété est héréditaire}$$

**Conclusion**  $S_n = \frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

### Exercice 7

Démontrer par récurrence que :

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

### Correction

#### Initialisation

**Pour  $n = 0$**  On a :  $0^3 = 0$  et  $\left( \frac{0(0+1)}{2} \right)^2 = 0$  ; Donc la propriété est initialisée

#### Hérédité

Soit  $p$  un entier naturel fixé ; supposons que :  $0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + p^3 = \left( \frac{p(p+1)}{2} \right)^2$  et

montrons que  $0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + p^3 + (p+1)^3 = \left( \frac{(p+1)(p+2)}{2} \right)^2$

On a :  $0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + p^3 = \left( \frac{p(p+1)}{2} \right)^2$

Donc  $0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + p^3 + (p+1)^3 = \left( \frac{p(p+1)}{2} \right)^2 + (p+1)^3$

$$= (p+1)^2 \left( \frac{p^2}{4} + p + 1 \right)$$

$$= (p+1)^2 \left( \frac{p^2 + 4p + 4}{4} \right)$$

$$= (p+1)^2 \left( \frac{(p+2)^2}{2^2} \right)$$

$$= \left( \frac{(p+1)(p+2)}{2} \right)^2$$

Donc la propriété est héréditaire

**Conclusion**  $0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

### Exercice 8

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_1 = \frac{1}{2}$  et  $u_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $u_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

### Correction

#### Initialisation

**Pour  $n = 1$**  On a :  $u_1 = \frac{1}{2}$  et  $\frac{(2 \times 1 - 1)}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$  ; Donc la propriété est initialisée

#### Hérédité

Soit  $p$  un entier naturel fixé ; supposons que :  $u_p \leq \frac{1}{\sqrt{3p+1}}$  et montrons que

$$u_{p+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3(p+1)+1}}$$

$$\text{On a : } u_{p+1} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2p-1) \times (2p+1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2p \times 2(p+1)}$$

$$= \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2p} \times \frac{(2p+1)}{2(p+1)}$$

$$= u_p \times \frac{(2p+1)}{2(p+1)}$$

D'après l'Hypothèse de récurrence  $u_p \leq \frac{1}{\sqrt{3p+1}}$

Donc  $u_{p+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3p+1}} \times \frac{(2p+1)}{2(p+1)}$  ; montrons que :  $\frac{1}{\sqrt{3p+1}} \times \frac{(2p+1)}{2(p+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(p+1)+1}}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } 2p+1 \leq 3p+1 &\Leftrightarrow (2p+1)^2 \leq (3p+1)(2p+1) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(2p+1)^2} \geq \frac{1}{(3p+1)(2p+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(2p+1)^2} \geq \frac{3}{3p+1} - \frac{2}{2p+1} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{2p+1} + \frac{1}{(2p+1)^2} \geq 1 + \frac{3}{3p+1} \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2p+1}\right)^2 \geq \frac{3p+1+3}{3p+1} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2(p+1)}{2p+1}\right)^2 \geq \frac{3p+4}{3p+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{2(p+1)}{2p+1} \geq \frac{\sqrt{3p+4}}{\sqrt{3p+1}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3p+1}} \times \frac{2p+1}{2(p+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3p+4}} \quad \boxed{2} \end{aligned}$$

On déduit de  $\boxed{1}$  et  $\boxed{2}$  que :  $u_{p+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3(p+1)+1}}$  ; donc la propriété est héréditaire

**Conclusion**  $u_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$