Exercices 1 :

Dériver les fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition et de dérivation.

$f_1 : x \mapsto 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$f_2 : x \mapsto 8x^7 + \frac{4}{x^2}$

$f_3 : x \mapsto 2x^4 + e^{3x-1}$

$f_4 : x \mapsto (5x^2 + 2x - 1)e^x$

$f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)e^{3x+2}$

$f_6 : x \mapsto \frac{e^x}{x}$

Correction

► $f_1 : x \mapsto 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

f_1 *est un polynôme ; donc son domaine de définition est* $\mathbb{R}$ *; et elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *;on a pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $f_1'(x) = 15x^2 + 4x - 3$

► $f_2 : x \mapsto 8x^7 + \frac{4}{x^2}$

$u_1 : x \mapsto 8x^7$ *est un polynôme ; donc son domaine de définition est* $\mathbb{R}$ *; et* $v : x \mapsto \frac{4}{x^2}$ *est définie sur* $\mathbb{R}^*$ *; d'où* f_2 *est définie sur* $\mathbb{R}^*$ *elle est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *comme somme de deux fonctions dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *;on a pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ *:*

$$f_2'(x) = 8 \times 7x^6 - \frac{4(x^2)'}{(x^2)^2}$$
$$= 56x^6 - \frac{4 \times 2x}{x^4}$$
$$= 56x^6 - \frac{8}{x^3}$$

► $f_3 : x \mapsto 2x^4 + e^{3x-1}$

$u : x \mapsto 2x^4$ est un polynôme ; donc son domaine de définition est $\mathbb{R}$; et $v : x \mapsto \frac{4}{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$; d'où f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$; on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f_3'(x) = 2 \times 4x^3 + (3x-1)' e^{3x-1}$

$$= 8x^3 + 3e^{3x-1}$$

► $f_4 : x \mapsto (5x^2 + 2x - 1)e^x$

$u : x \mapsto 5x^2 + 2x - 1$ est un polynôme ; donc son domaine de définition est $\mathbb{R}$; et $v : x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$; d'où f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$;on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= (5x^2 + 2x - 1)e^x \\ &= (10x + 2)e^x + (5x^2 + 2x - 1)e^x \\ &= (10x + 2 + 5x^2 + 2x - 1)e^x \\ &= (5x^2 + 12x + 1)e^x \end{aligned}$$

► $f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)e^{3x+2}$

$x \mapsto 1 - 6x^2$ est un polynôme ; donc son domaine de définition est $\mathbb{R}$; et $v : x \mapsto e^{3x+2}$ est définie sur $\mathbb{R}$; d'où f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$; on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \left((1 - 6x^2)e^{3x+2}\right)' \\ &= (1 - 6x^2)' e^{3x+2} + 3(1 - 6x^2)e^{3x+2} \\ &= -12x \times e^{3x+2} + 3(1 - 6x^2)e^{3x+2} \\ &= (-12x + 3 - 18x^2)e^{3x+2} \\ &= 3(-6x^2 - 4x + 1)e^{3x+2} \end{aligned}$$

► $f_6 : x \mapsto \frac{e^x}{x}$

$u_1 : x \mapsto e^x$ est un polynôme ; donc son domaine de définition est $\mathbb{R}$; et $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$; d'où f_2 est définie sur $\mathbb{R}^*$ elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}^*$; on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f_6'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$

$$= \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

Exercices 2:

Etude de fonction polynôme

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$ *définie sur* $\mathbb{R}$

1- f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. *Que vaut* $f'(x)$ *?*

2- Construire le tableau de signes de $f'(x)$ *et en déduire le tableau de variations de f.*

Correction

1- $f'(x) = \left(x^3 + 3x^2 - 45x + 21\right)'$

$$= 3x^2 + 6x - 45$$
$$= 3\left(x^2 + 2x - 15\right)$$
$$= 3\left(x^2 + 2x + 1 - 16\right)$$
$$= 3\left((x+1)^2 - 4^2\right)$$
$$= 3(x+1-4)(x+1+4)$$
$$= 3(x-3)(x+5)$$

2- Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-5		$+3$		$+\infty$
$(x+5)$		$-$	0	$+$			
$(x-3)$		$-$			0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-5		$+3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	196	$\searrow$	48	$\nearrow$	

$f(-5) = -4$ *et* $f(3) = 48$

Exercices 3:

Exponentielle et quotient

Pour tout réel $x \neq -1$, *on pose :* $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

Justifier que f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ *et sur* $]-1;+\infty[$ *et que pour tout réel x dans ces intervalles* $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$

Étudier le signe de $f'(x)$ *et en déduire le tableau de variations de f.*

<u>Correction</u>

Les fonctions $x \mapsto e^x$ *et* $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ *sont dérivables sur* $]-\infty;-1[$ *et sur* $]-1;+\infty[$ *; donc f est dérivable sur* $]-\infty;-1[$ *et sur* $]-1;+\infty[$ *comme produit de deux fonctions dérivables ; et pour tout x dans ces intervalles on a :*

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{e^x(1+x-1)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

On déduit que $f'(x)$ *est du même signe que x ; d'où le tableau de variations de f :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+x} = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{1+x} = +\infty$$

(car $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$*)*

<u>Exercices 4 :</u>

Exponentielle et produit

Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \left(-x^2+x+1\right)e^x$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

Correction

La fonction $f : x \mapsto \left(-x^2+x+1\right)e^x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme produit de deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *; et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(-x^2+x+1\right)e^x\right)' \\ &= \left(-2x+1\right)e^x + \left(-x^2+x+1\right)e^x \\ &= \left(-2x+1+-x^2+x+1\right)e^x \\ &= \left(-x^2-x+2\right)e^x \\ &= (x+2)(1-x)e^x \end{aligned}$$

Donc $f'(x)$ *est du même signe que* $\left((x+2)(1-x)\right)$ *; d'où le tableau de signe de* $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x+2)$		$-$	0	$+$			
$(1-x)$		$+$			0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-5e^{-2}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

$f(-2) = -5e^{-2}$; $f(1) = e$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Exercices 5 :

Montrer une inégalité

A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel x, $e^x \geq 1+x$

Correction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = e^x - (1+x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ *comme somme de deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *; et pour tout* $x \in \mathbb{R}$

; on a : $f'(x)=e^x-1$

D'où : ► $f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow e^x-1\leq 0$

$\Leftrightarrow e^x\leq 1$

$\Leftrightarrow e^x\leq e^0$

$\Leftrightarrow x\leq 0$

► $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x-1\geq 0$

$\Leftrightarrow e^x\geq 1$

$\Leftrightarrow e^x\geq e^0$

$\Leftrightarrow x\geq 0$

D'où le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc 0 *est une valeur minimale globale pour f ; d'où :*

$(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)\geq 0$

Par suite : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x-(1+x)\geq 0$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x\geq 1+x$

<u>Exercices 6 :</u>

Dériver deux fois (dérivée seconde)

Pour chacune des fonctions suivantes, deux fois dérivables sur l'intervalle mentionné, donner une expression de la dérivée seconde.

$f_1 : x\mapsto 6x^2+2x-1$ *sur* $\mathbb{R}$

$f_2 : x\mapsto 3x^2+2x-\dfrac{3}{x}$ *sur* $]-\infty;0[$

$f_3 : x \mapsto x^2 e^{3x+1}$ *sur* $\mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 1}{x}$ *sur* $]-\infty;0[$

Correction

► $f_1 : x \mapsto 6x^2 + 2x - 1$ *sur* $\mathbb{R}$

$$f_1'(x) = \left(6x^2 + 2x - 1\right)'$$

$$= 12x + 2$$

Donc $f_1''(x) = (12x + 2)'$

$$= 12$$

► $f_2 : x \mapsto 3x^2 + 2x - \dfrac{3}{x}$ *sur* $]-\infty;0[$

$$f_2'(x) = \left(3x^2 + 2x - \frac{3}{x}\right)'$$

$$= 6x + 2 + \frac{3}{x^2}$$

Donc $f_2''(x) = 6 - \dfrac{3 \times 2x}{\left(x^2\right)^2}$

$$= 6\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= 6\left(\frac{x^3 - 1}{x^3}\right)$$

► $f_3 : x \mapsto x^2 e^{3x+1}$ *sur* $\mathbb{R}$

$$f_3'(x) = \left(x^2 e^{3x+1}\right)'$$

$$= 2xe^{3x+1} + 3x^2 e^{3x+1}$$

$$=\left(2x+3x^2\right)e^{3x+1}$$

Donc $f_3''(x)=\left(\left(2x+3x^2\right)e^{3x+1}\right)'$

$$=(2+6x)e^{3x+1}+3\left(2x+3x^2\right)e^{3x+1}$$

$$=\left((2+6x)+3\left(2x+3x^2\right)\right)e^{3x+1}$$

$$=\left(9x^2+12x+2\right)e^{3x+1}$$

► $f_4 : x \mapsto \dfrac{3x^2-1}{x}$ *sur* $]-\infty;0[$

$$f_4'(x)=\left(\frac{3x^2-1}{x}\right)'$$

$$=\frac{6x\times x-\left(3x^2-1\right)}{x^2}$$

$$=\frac{3x^2+1}{x^2}$$

Donc $f_4''(x)=\left(\dfrac{3x^2+1}{x^2}\right)'$

$$=\frac{6x\times x^2-2x\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2\right)^2}$$

$$=\frac{6x^3-6x^3-2x}{x^4}$$

$$=\frac{-2x}{x^4}$$

$$=\frac{-2}{x^3}$$