Série n°2 «Exercices sur Dérivation » Terminal S

Exercices 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x$.

Étudier les variations de f.

Correction

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ *comme polynôme de troisième degré.*
Pour tout $x\in\mathbb{R}$ *; on a :* $f'(x)=x^2-x-2$
Etudions le signe de $f'(x)$ *: pour ceci cherchons les racines du polynôme* x^2-x-2 *; le discriminant est :* $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-2)=9$

Donc le polynôme admet deux racines : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$ *et* $x_2=\dfrac{1+\sqrt{9}}{2}=2$

D'où le tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On conclut que f est décroissante sur $[-1;2]$ *et croissante sur chacun des intervalles* $]-\infty;-1]$ *et* $[2;+\infty[$

Exercices 2 :

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ *par :* $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-2}$.

Déterminer une équation de la droite (T) *tangente à la courbe* C_f *représentative de la fonction f au point d'abscisse* -2.

Correction

f est dérivable sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ *; et on a :* $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-2)^2}$

D'où $f'(-2)=1-\dfrac{4}{(-2-2)^2}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ et $f(-2)=-2+2+\dfrac{4}{-2-2}=-1$

Et une équation de la droite (T) tangente à la courbe C_f représentative de la fonction f au point d'abscisse -2 ; est : $y=\dfrac{3}{4}(x+2)-1=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

Exercices 3 :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x)=x^2-2x+3$ et $g(x)=-2x^2+10x-9$

1. Étudier les variations des fonctions f et de g.
2. On appelle C_f et C_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
   Tracer ces deux courbes.
3. Montrer que les courbes C_f et C_g possède un point commun en lequel elles admettent une même tangente (T).
   Construire cette tangente sur le graphique précédent.

Correction

1. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme polynôme de deuxième degré.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$; on a :
   ► $f'(x)=2x-2=2(x-1)$

D'où le tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$

On conclut que f est décroissante sur $]-\infty;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

► $g'(x)=-4x+10=2(-2x+5)$

D'où le tableau de signe de $g'(x)$

x	$-\infty$ $\dfrac{5}{2}$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$

On conclut que f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$

<u>Exercices 4 :</u> ***Calculer rapidement des dérivées avec des quotients et des puissances***

Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction sur l'intervalle I indiqué:

a) $f(x)=\frac{5x^4}{2}-\frac{3}{4x^2}-\frac{2}{3}$ *et* $I=]-\infty;0[$.

b) $f(t)=\frac{1}{(t^2+1)^3}$ *et* $I=\mathbb{R}$

<u>Correction</u>

a) *Pour tout* $x\in]-\infty;0[$ *; on a :* $f'(x)=\frac{4\times 5x^3}{2}+\frac{3\times 8x}{(4x^2)^2}$.

$$=10x^3+\frac{24}{16x^4}$$

$$=10x^3+\frac{3}{2x^4}$$

b) *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *; on a :* $f'(t)=\frac{\left((t^2+1)^3\right)'}{\left((t^2+1)^3\right)^2}$

$$=\frac{3\times 2t(t^2+1)^2}{(t^2+1)^6}$$

$$=\frac{6t}{(t^2+1)^4}$$

<u>Exercices 5 :</u> ***Calculer rapidement des dérivées avec des quotients et des puissances***

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^2$

<u>Correction</u>

a) *Pour tout* $x\in]0;+\infty[$ *; on a :* $f'(x)=2\times\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)'\times\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

$$=2\times\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{2x}{x^4}\right)\times\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=4\times\left(\frac{-x^2+2x}{x^4}\right)\times\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2}\right)$$

$$=4\times\left(\frac{-x+2}{x^3}\right)\times\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{4}{x^6}\times(-x+2)\times\left(3x^2+2x-1\right)$$

$$=\frac{4}{x^6}(-x+2)(x+1)(3x-1)$$

<u>Exercices 6 :</u> *Calculer* ***rapidement des dérivées avec des quotients et des puissances***

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ *par :* $f(t)=\left(\frac{t+2}{t-1}\right)^2$

<u>Correction</u>

Pour tout $x\in\,]-\infty;1[$ *; on a :* $f'(t)=2\times\left(\frac{t+2}{t-1}\right)'\times\left(\frac{t+2}{t-1}\right)$

$$=2\times\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}{(t-1)^2}\times\left(\frac{t+2}{t-1}\right)$$

$$=\frac{-6(t+2)}{(t-1)^3}$$