Série n ° 6 d'exercices sur les fonctions limites et continuité

Terminale S

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) À l'aide du théorème de composition déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

CORRECTION

$$1)\ D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \frac{x+3}{x-5}\geq 0\ et\ x-5\neq 0\right\}$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \begin{cases}x+3\geq 0\\ x-5>0\end{cases}\ ou\ \begin{cases}x+3\leq 0\\ x-5<0\end{cases}\right\}$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \begin{cases}x\geq -3\\ x>5\end{cases}\ ou\ \begin{cases}x\leq -3\\ x<5\end{cases}\right\}$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x>5\ \ ou\ x\leq -3\right\}$$

$$=]-\infty;-3]\cup]5;+\infty[$$

Autre méthode étude de signe de $\frac{x+3}{x-5}$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x+3$		$-$	0		$+$		
$x-5$			$-$		0	$+$	
$\frac{x+3}{x-5}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc $D_f=]-\infty;-3]\cup]5;+\infty[$

2) On a : ► $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x-5}=1$ et $\lim\limits_{X\to1}\sqrt{X}=1$; donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=1$

► $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x-5}=1$ et $\lim\limits_{X\to1}\sqrt{X}=1$; donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=1$

► $\lim\limits_{x\to5^+}\frac{x+3}{x-5}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$; donc par composition $\lim\limits_{x\to5^+}\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=+\infty$

EXERCICE 2

f est une fonction définie sur $]-5;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left[f(x)\right]$

2) Trouver la forme algébrique de $f\left[f(x)\right]$ puis retrouver le résultat du 1)

CORRECTION

1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x+5}=1$

Par composition de fonction par elle-même on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left[f(x)\right]=f(1)=\frac{-1}{3}$

Car $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

2) pour tout $x\in D_f$; on a : $f\left[f(x)\right]=f\left(\frac{x-3}{x+5}\right)$

$$=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}$$

$$=\frac{x-3-3(x+5)}{x-3+5(x+5)}$$

$$=\frac{-2x-18}{6x+22}$$

Donc on retrouve que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-18}{6x+22}=\frac{-1}{3}$

EXERCICE 3

À l'aide de la fonction associée déterminer les limites suites suivantes :

1) $u_n = e^{-3n+5}$ *2)* $u_n = \sin\left(\frac{1}{3+n}\right)$ *3)* $u_n = e^{\frac{-2}{1+n}}$

CORRECTION

1) $u_n = e^{-3n+5}$ *; la suite est associée à la fonction* $x \mapsto e^{-3x+5}$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x+5 = -\infty$

Donc par composition des fonctions $u : x \mapsto e^x$ *et* $v : x \mapsto -3x+5$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-3x+5} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2) $u_n = \sin\left(\frac{1}{3+n}\right)$ *; la suite est associée à la fonction* $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3+x}\right)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3+x} = 0$

Donc par composition des fonctions $u : x \mapsto \sin(x)$ *et* $v : x \mapsto \frac{1}{3+x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{3+x}\right) = \sin(0) = 0$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

3) $u_n = e^{\frac{-2}{1+n}}$ *; la suite est associée à la fonction* $x \mapsto e^{\frac{-2}{1+x}}$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{1+x} = 0$

Donc par composition des fonctions $u : x \mapsto e^x$ *et* $v : x \mapsto \frac{-2}{1+x}$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{-2}{1+x}} = e^0 = 1$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

EXERCICE 4 *Théorème « admis » – Limite d'une fonction composée :*

Soient deux fonctions f et g , et soient a , b et ℓ des réels $-\infty$ ou $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ *et si* $\lim\limits_{x\to b} g(x)=\ell$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=\ell$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}$

2) Déterminer la limite éventuelle en 2 de $\sqrt{\dfrac{x^2-3x-4}{2-x}}$

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{x}$.

Rappel : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

CORRECTION

1) Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1=+\infty$ *et* $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

Donc par composition des fonctions $u:x\mapsto\sqrt{x}$ *et* $v:x\mapsto x^2+x+1$

On obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$

2) Déterminons la limite éventuelle en 2 de $\sqrt{\dfrac{x^2-3x-4}{2-x}}$

On a : $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x-4}{2-x}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

Donc par composition des fonctions $u:x\mapsto\sqrt{x}$ *et* $v:x\mapsto\dfrac{x^2-3x-4}{2-x}$

On obtient $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{x^2-3x-4}{2-x}}=+\infty$

3) Déterminons $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}$.

On a : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ *et* $\lim_{x\to 1}5x=5$

On considère les fonctions $u: x\mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ *et* $v: x\mapsto 5x$

Donc par composition des fonctions $u: x\mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ et $v: x\mapsto 5x$

On obtient $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}=1$ *; d'où* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=5$

www.guessmaths.co *E-mail* : *abdelaliguessouma@gmail.com*
WhatsApp : *0717467136*